東京大学大学院
新領域創成科学研究科
基盤科学研究系

受　験　番　号					

問題冊子にも受験番号を書きなさい。

先端エネルギー工学専攻

２０２０年度大学院入学試験問題

修士課程・博士後期課程共通

物　　理　　学

２０１９年８月２０日（火）

１３：３０～１６：３０（１８０分）

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，この冊子を開いてはいけません。
2. 本冊子の総ページ数は 11 ページです。落丁，乱丁，印刷不鮮明な箇所などがあった場合には申し出ること。
3. 解答には，必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
4. 問題は３題出題されます。２題選択して解答しなさい。
5. 解答用紙は計２枚配られます。解答する問題ごとに必ず１枚の解答用紙を使用しなさい。解答用紙に書ききれないときは，裏面にわたってもよい。
6. 解答は日本語または英語で記入しなさい。
7. 解答用紙上方の指定された箇所に，受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入しなさい。問題冊子にも受験番号を記入しなさい。
8. 計算用紙は本冊子から切り離さないこと。
9. 解答に関係のない記号，符号などを記入した答案は無効とする。
10. 解答用紙および問題冊子は持ち帰ってはいけません。

（計算用紙）

第１問（物理学）

質量 m のおもり P を糸でつるした振り子を考える（図１参照）．糸は，振り子の支点 O を通って，垂線上の点 Q で支えられている． P と O の距離を L と表し，振り子の振れ角（糸と垂線との角度）を θ と書く．重力加速度を g と表す．おもり P は質点とみなしてよい．おもり，および糸に摩擦力ははたらかないとする．糸は伸縮しないものとし，重さを無視できるとする．糸にたるみが生じない P の運動のみを考える．

最初に，P は静止しているとする．Q を垂直に引き上げ，距離 D だけ高い位置 R で止める（図 2 参照）．この過程でおこなわれた仕事は mgD である．次に，P が振動しているときに，Q を垂直に引き上げて R で止めたとする（図３参照）．

（問 1） このときに必要な仕事は，静止している P を引き上げる場合と比べてどう変わるか，理由を含めて定性的に推論せよ．

次に，Q をゆっくり引き上げる場合に限って，仕事量の定量的な評価を試みる．まず，点 Q が固定され，振り子の長さ L が一定の場合について考える．

（問 2） P の運動方程式を定式化し，θの時間変化を記述する微分方程式を求めよ．

（問 3） $\omega = \sqrt{g/L}$ とおく．

$$E = \frac{mL^2}{2}\left[\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + 2\omega^2(1-\cos\theta)\right]$$

が運動の定数であること（$dE/dt = 0$）を示せ．ただし t は時刻を表す．

（問 4） $q = L\theta,\ p = mL(d\theta/dt)$ とおく．振り子の周期を T とおいたとき，

$$J = \int_0^T p\,\frac{dq}{dt}\,dt$$

が運動の定数であること（$dJ/dt = 0$）を示せ．

（問 5） 振り子の振幅（振れ角の最大値）を a と書く． a が十分小さいと仮定し， E および J をaとωの関数として表せ．

次に，振動している振り子に対して点 Q をゆっくり動かして，L を変化させる．振り子が 1 周期振動する間に生じる L の変化は無視できるとする．

（問 6）このときも J が一定であることを示せ．

（問 7） 振幅 a で振動している振り子に対して点 Q をゆっくり垂直に持ち上げて最初の位置から距離 D だけ高い点 R で止める．このとき必要な仕事を求めよ．ただし，$D \ll L$ として近似計算してよい．また，振幅は十分小さいと仮定し，（問 5）の結果を用いてよい．

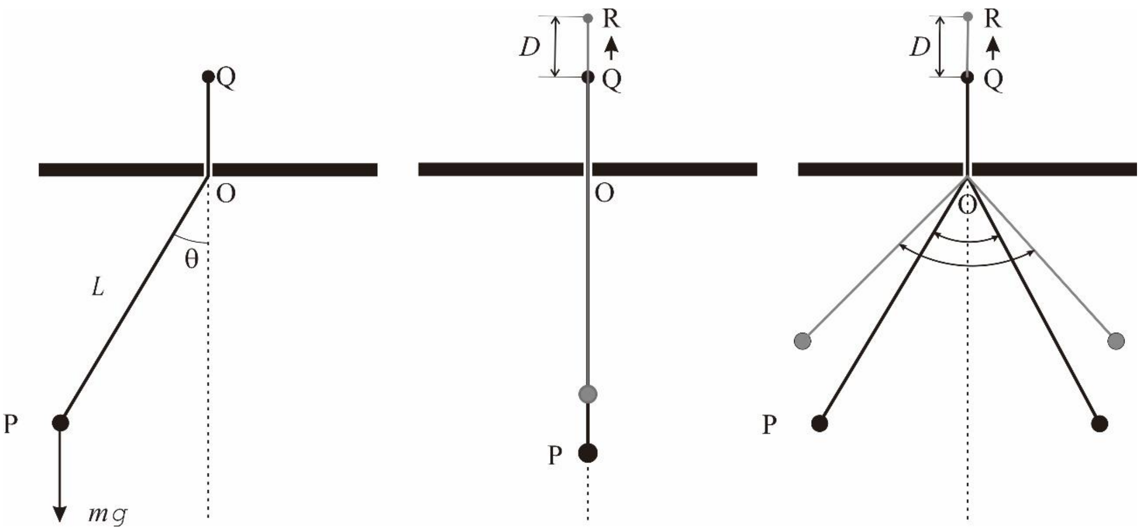

図 1　　図 2　　図 3

第２問（物理学）

１．円環電流が作る磁場について以下の問いに答えよ．

（問１）ビオ・サバールの法則によれば，位置$\boldsymbol{r}'$に置かれた電流素片$I d\boldsymbol{s}$が位置$\boldsymbol{r}$に作る磁場は

$$d\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\boldsymbol{s} \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3}$$

で与えられる．ここでμ_0は真空の透磁率である．図１のように，xy（$z = 0$）平面上に原点 O を中心として置かれた半径aの円環電流を考える．大きさIの円環電流が図に示す向きに流れるとき，z軸上の磁場の大きさ$B(z)$をzの関数として求めよ．

（問２）図２のように，半径aの２つの円環電流が，$z = +L/2$及び$z = -L/2$平面上に平行に置かれている．z軸が円環電流の共通の軸である．図のように，それぞれに同じ向きの電流Iが流れるとき，z軸上の磁場の大きさ$B(z)$をzの関数として求めよ．また，$L \ll a$及び$a \ll L$の場合の$B(z)$をzの関数として概略を描け（$B(z)$を計算する必要はない）．Lの値の変化により$B(z)$の形状がどのように変化するか説明し，$B(z)$がzに対して偶関数であることを示せ．

（問３）問２で求めた$B(z)$の１次及び２次の導関数は

$$\frac{dB}{dz} = C_1 \left[\left(z + \frac{L}{2}\right) {A_1}^{-5} + \left(z - \frac{L}{2}\right) {A_2}^{-5} \right]$$

$$\frac{d^2B}{dz^2} = C_2 \left[-3\left({A_1}^{-5} + {A_2}^{-5}\right) + 15 \left(z + \frac{L}{2}\right)^2 {A_1}^{-7} + 15 \left(z - \frac{L}{2}\right)^2 {A_2}^{-7} \right]$$

の形に書ける．これらの式中のA_1，A_2，C_1，及びC_2を求めよ．z軸上の$z = 0$でこの$B(z)$をテイラー展開して，zの２次の項をゼロにする事で$z = 0$近傍のz方向の変化が小さい磁場を作るLを求めよ．求めたLに対して，$z = 0$における磁場$B(z)$の大きさを求めよ．

２．磁場中で定常的に運動する導体について以下の問いに答えよ．

（問４）xyz直交座標系のz方向を向いた一様な磁場$\boldsymbol{B} = B\hat{\boldsymbol{z}}$中で，$x$方向を向いた導体線素$d\boldsymbol{s}$が$y$方向に速度$\boldsymbol{v} = v\hat{\boldsymbol{y}}$で運動するとき（$\hat{\boldsymbol{y}}$と$\hat{\boldsymbol{z}}$はそれぞれ$y$及び$z$方向の単位ベクトルである），導体線素の両端に生じる起電力の大きさを求めよ．ただし，導体線素の速度は十分小さく，相対論的効果は考慮する必要はない．

（問５）図３のように，z方向を向いた一様な磁場$\boldsymbol{B} = B\hat{\boldsymbol{z}}$中で，半径$c$，厚さ$t$で，中央に半径$b$の円形の穴が空いた円板を考える．円板は，中心軸であるz軸を軸として自由に回転できる．円板の半径$r = b$及び$r = c$の側面は完全導体であり，図のように側面上のブラシ，配線，及びスイッチを介して電気的に接続されている．円板の側面以外の部分の素材の電気抵抗率はη（定数）である．円板を，z軸周りに図に示す向きに角速度ωで回転させる．ただしブラシ，配線，及びスイッチは回転しない．スイッチを開いた

状態で円板を角速度ωで回転させるとき，PQ 間に発生する電圧を求めよ．次に，スイッチを閉じた状態で円板を角速度ωで回転させるために必要な仕事率を求めよ．また，このときの円板中の電流密度をrの関数として求めよ．円板の回転時の摩擦や，ブラシ及び配線部分の電気抵抗は無視して良い．

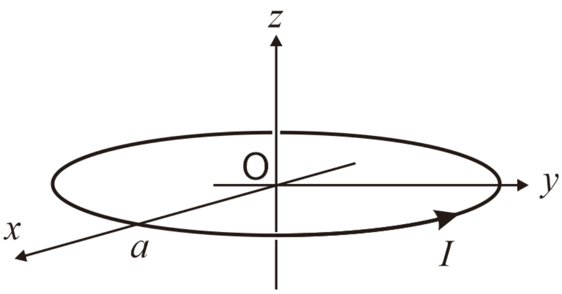

図 1

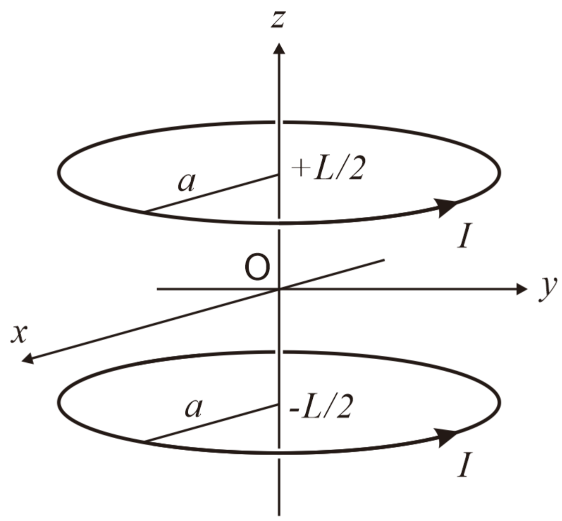

図 2

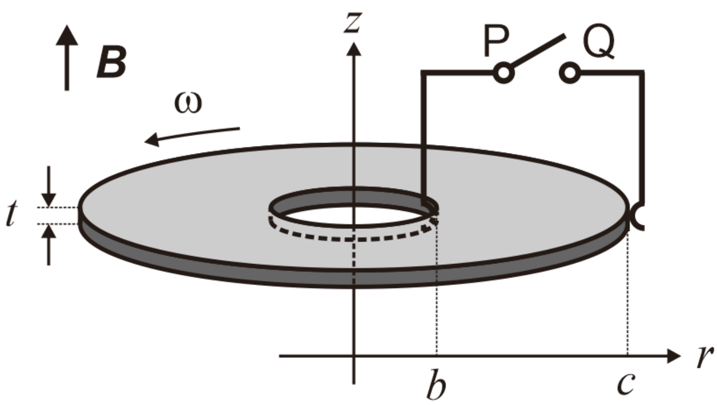

図 3

第３問（物理学）

図１のように，圧力 P_0，温度 T_0 の大気中に，水平に設置された断面積 S の円筒容器がある．その中には質量 M のピストンがあり，単原子分子理想気体が封入されている．容器及びピストンは断熱壁である．最初，ピストンは左端から距離 L の位置につりあって静止しており，その時の内部の理想気体の温度は T_0 であった．封入された理想気体の比熱比はγで一定とし，ピストンのつりあいの位置からの変位を x とする．この初期状態から，ピストンをわずかに l $(l \ll L)$だけ左に押した後に放したところ，動きはじめた．封入された理想気体の変化は準静的に起こるものとして，以下の設問に答えよ．

（問１）ピストンがなめらかに摩擦無く動く場合，ピストンは単振動する．ピストンの位置が x （$|x| \ll L$）のときのピストンの運動方程式，及び見かけのばね定数を示せ．ただし，$|y| \ll 1$のとき，$(1+y)^a \fallingdotseq 1+ay$ が近似的に成り立つことを用いてよい．

（問２）次に，ピストンと容器の間に摩擦が生じる場合を考える．この場合，ピストンは振動せずにゆっくり動いた後，$x = x_1$において静止した．また，ピストンが放された後，摩擦によって生じた熱は，全て封入した理想気体に吸収された．最終的にピストンが静止した際の理想気体の圧力はP_0と近似できるものとする．最初のつりあいの位置での状態を基準としたピストン静止後の封入気体の内部エネルギーの変化量，および，ピストンが放されてから静止するまでに外気に対しておこなった仕事を求めよ．ただし，理想気体の定積モル比熱をC_vとし，Nモルの理想気体が封入されているものとする．

（問３）（問２）におけるx_1を求めよ．

次に，図２に示すように，圧力 P_0，温度 T_0 の大気中に，水平に設置された十分に長い筒（断面積 S）の中に，ピストンが多数，等間隔 L で配置されている場合を考える．最初，ピストン間に封入された単原子分子理想気体は全て，圧力 P_0，温度 T_0，質量 m であり，全てのピストンは静止している．ピストンはなめらかに摩擦無く動くものとする．また，筒の壁及びピストンは断熱壁とする．

ここで，ピストンの質量が十分軽く，その影響を無視できる場合を考える．このとき，各ピストンに挟まれた気体の運動は，図３に示すように，質点がばねでつながれた状態として扱うことができる．そして，各質点の質量は m とみなすことができ，初期位置からの変位が L に対して十分小さい場合，そのばね定数は（問１）で求めたものに一致する．

ここで，n 番目の質点の初期位置からの変位をx_nとし，$n=0$の質点を $x_0 = A\sin\omega t$ （t は時刻，$A \ll L$）となるように強制的に振動させたところ，その振動が右方向に伝播した．以下の設問に答えよ．

（問４）n 番目の質点について，x_{n-1}，x_n，x_{n+1}，m，t，P_0，S，L，γを用いて，運動方程式を示せ．

（問５）n 番目の質点について，$x_n = A\sin(\omega t - bnL)$ が成立するものとする（$\omega > 0$）．このとき，ωを b, m, P_0, S, L, γ を用いて示せ．

（問６）$n=0$の質点に与えた振動が伝播する速度（位相が一定の点の移動速度）を，m, P_0, S, L, γを用いて示せ．ただし，$bL \ll 1$ であり，$\theta \ll 1$のとき$\sin\theta \fallingdotseq \theta$ としてよい．

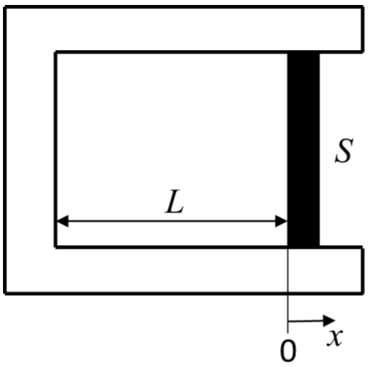

図１

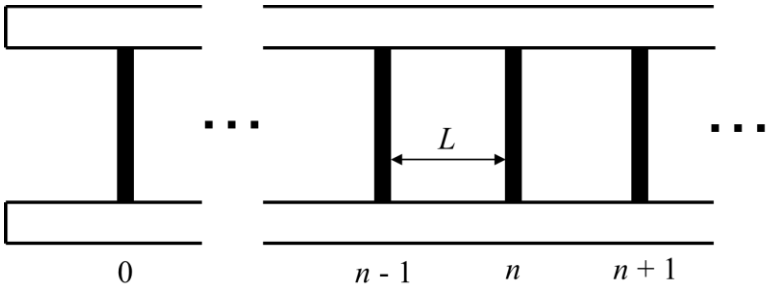

図２

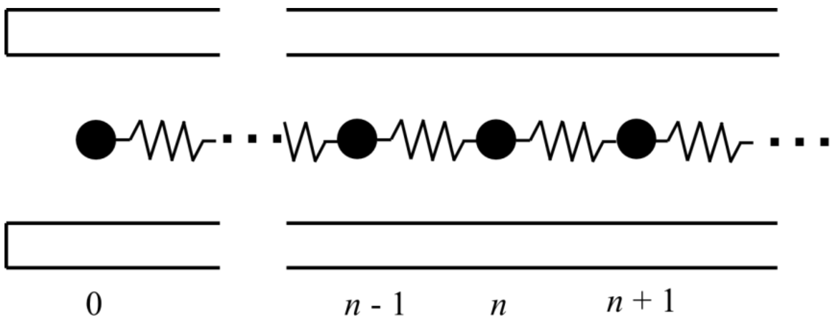

図３

（計算用紙）

（計算用紙）

（計算用紙）