

東京大学大学院
新領域創成科学研究科
基盤科学研究系

受 験 番 号					

問題冊子にも受験番号を書きなさい。

先端エネルギー工学専攻
2020年度大学院入学試験問題
修士課程・博士後期課程共通
数 学

2019年8月20日 (火)

13:30～16:30 (180分)

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで、この冊子を開いてはいけません。
2. 本冊子の総ページ数は6ページです。落丁、乱丁、印刷不鮮明な箇所などがあった場合には申し出ること。
3. 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
4. 問題は2題出題されます。2題とも解答しなさい。
5. 解答用紙は計2枚配られます。解答する問題ごとに必ず1枚の解答用紙を使用しなさい。解答用紙に書ききれないときは、裏面にわたってもよい。
6. 解答は日本語または英語で記入しなさい。
7. 解答用紙上方の指定された箇所に、受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入しなさい。問題冊子にも受験番号を記入しなさい。
8. 計算用紙は本冊子から切り離さないこと。
9. 解答に関係のない記号、符号などを記入した答案は無効とする。
10. 解答用紙および問題冊子は持ち帰ってはいけません。

(計算用紙)

第1問 (数学)

関数 $f(t)$ のラプラス変換 $F(s)$ は, e を自然対数の底として, $F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-ts} dt$ で与えられる.

(問1) 次の問いに答えよ.

(a) 図1および図2に示す関数のラプラス変換を求めよ. ただし τ は正の実定数である.

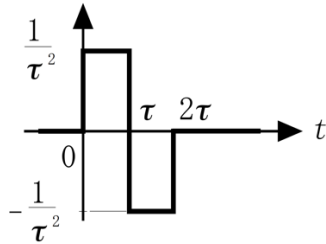


図1

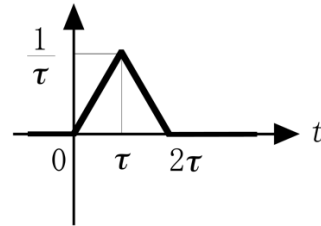


図2

(b) (a) で求めた図1および図2の関数のラプラス変換において, $\tau \rightarrow 0$ としたときの極限を求めよ.

(問2) 連立常微分方程式

$$\begin{cases} \left(\frac{d}{dt} - 7\right)x - 3y + 2z = 0 \\ -4x + \left(\frac{d}{dt} - 7\right)y + z = 0 \\ 4x + 4y + \left(\frac{d}{dt} - 4\right)z = 0 \end{cases}$$

を解け. ただし, $x(0_+) = 1, y(0_+) = z(0_+) = 0$ とする.

(問3) フーリエ変換とラプラス変換の関係を説明せよ. なお, 関数 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ は, $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$ で与えられる. i は虚数単位である.

第2問 (数学)

次の行列 A , 実数ベクトル \mathbf{x} , 関数 $f(\mathbf{x})$ について以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$$

ただし \mathbf{x}^T は \mathbf{x} の転置である.

(問1) 次式をみたす正規直交行列 P と対角行列 Λ を求めよ.

$$P^T A P = \Lambda, \quad P^T P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

ただし, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ とし, 行列 P の第一行目の成分は非負とする.

(問2) $\|\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{x}^T \mathbf{x} = 1$ のもとで $f(\mathbf{x})$ の最小値を求めたい.

$$g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{x} - 1, \quad L(\mathbf{x}, \mu) = f(\mathbf{x}) + \mu g(\mathbf{x})$$

とするとき, 極小点 \mathbf{x} では次式が成り立つことが必要であることが知られている.

$$\frac{\partial L(\mathbf{x}, \mu)}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial L(\mathbf{x}, \mu)}{\partial \mu} = g(\mathbf{x}) = 0$$

(a) $\frac{\partial L(\mathbf{x}, \mu)}{\partial \mathbf{x}}$ を計算せよ.

(b) $f(\mathbf{x})$ の最小値と, その最小値を与える \mathbf{x} を求めよ.

(問3) 次の制約式のもとで $f(\mathbf{x})$ の最小値を求めたい.

$$g_1(\mathbf{x}) = (3 \quad -\sqrt{2} \quad -1)\mathbf{x} = 0, \quad g_2(\mathbf{x}) = (3 \quad \sqrt{2} \quad -1)\mathbf{x} - 2 = 0$$

(a) $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ の変換を用いて, 関数 $f(\mathbf{x})$ と制約式 $g_1(\mathbf{x}) = 0, g_2(\mathbf{x}) = 0$ を y_1, y_2, y_3 により

書き換えよ. ただし $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ とする.

(b) $f(\mathbf{y})$ の最小値と, その最小値を与える \mathbf{y} を求めよ.

(計算用紙)

(計算用紙)