東京大学大学院
新領域創成科学研究科
基盤科学研究系

受　験　番　号					

問題冊子にも受験番号を書きなさい。

先端エネルギー工学専攻

平成３１（２０１９）年度大学院入学試験問題

修士課程・博士後期課程共通

数　　　学

平成３０年８月２１日（火）

１３：３０～１６：３０（１８０分）

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，この冊子を開いてはいけません。
2. 本冊子の総ページ数は 6 ページです。落丁，乱丁，印刷不鮮明な箇所などがあった場合には申し出ること。
3. 解答には，必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
4. 問題は２題出題されます。２題とも解答しなさい。
5. 解答用紙は計２枚配られます。解答する問題ごとに必ず１枚の解答用紙を使用しなさい。解答用紙に書ききれないときは，裏面にわたってもよい。
6. 解答は日本語または英語で記入しなさい。
7. 解答用紙上方の指定された箇所に，受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入しなさい。問題冊子にも受験番号を記入しなさい。
8. 計算用紙は本冊子から切り離さないこと。
9. 解答に関係のない記号，符号などを記入した答案は無効とする。
10. 解答用紙および問題冊子は持ち帰ってはいけません。

（計算用紙）

第 1 問（数学）

（問 1）次の積分

$$\int_0^1 \frac{x(1+x)\sin(\log x)}{\log x}\,dx \tag{1}$$

に関する以下の問に答えよ．ただし $\log x$ は自然対数関数，e は自然対数の底である．

(a) $x = e^{-t}$ として式(1)を t に関する積分式に変換せよ．

(b) 三角関数 $\sin t$ のラプラス変換 $\int_0^\infty \sin t\, e^{-st} dt$ を計算せよ．計算の過程も示せ．

(c) 上の (a)，(b) の結果を用い，式(1)で表される積分の値を求めよ．

（問 2）以下の微分方程式の一般解をそれぞれ求めよ．ただし $\log x$ は自然対数関数，e は自然対数の底である．

(a) $x\dfrac{dy}{dx} - 3y = 3$

(b) $x^3\dfrac{d^3y}{dx^3} - 4x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + 8x\dfrac{dy}{dx} - 8y = x^3\log x$

(c) $\dfrac{d^3y}{dx^3} - 6\dfrac{d^2y}{dx^2} + 12\dfrac{dy}{dx} - 8y = 6e^{-x}$

第２問（数学）

次の xy 平面上の二次曲線について，以下の問に答えよ．ただし x と y は実数とする．

$$2x^2 - 2\sqrt{3}xy + 4y^2 - 20y + 15 = 0 \qquad (1)$$

（問１）ベクトル$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, 実対称行列$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} p & q \\ q & r \end{pmatrix}$を用いて式(1)を次式に変形する．

$$^t\boldsymbol{x}\mathrm{A}\boldsymbol{x} + 2{}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{x} + c = 0 \qquad (2)$$

このとき，実数 b_1，b_2，p，q，r，c の値をそれぞれ求めよ．ただし$^t\boldsymbol{x}$と$^t\boldsymbol{b}$はそれぞれ$\boldsymbol{x}$と$\boldsymbol{b}$の転置ベクトルを表す.

（問２）（問１）で求めた行列 A の固有値および固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルは大きさ 1 の単位ベクトルとせよ.

（問３）行列 P を用いて、行列 A を対角行列 $\mathrm{B} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ に変換する．このとき，行列 P および B を求めよ．ただし P^{-1} は P の逆行列を表す.

（問４）（問３）で求めた行列 P を用いて，$\mathrm{P}\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}$の変換により式(2)を次式のように変形できることを示せ.

$$^t\boldsymbol{x}'\mathrm{B}\boldsymbol{x}' + 2{}^t\boldsymbol{b}\mathrm{P}\boldsymbol{x}' + c = 0 \qquad (3)$$

ただし$\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$である．A は実対称行列なので，P は直交行列，すなわち$\mathrm{P}{}^t\mathrm{P} = {}^t\mathrm{PP} = \mathrm{E}$（$^t\mathrm{P}$は$\mathrm{P}$の転置行列，E は単位行列）であることに注意せよ．

（問５）（問４）の結果をもとに，x'，y'を用いて式(1)を表せ.

（問６）式(1)の二次曲線を xy 平面上に描け.

（問７）x，y が式(1)を満たすとき，$f(x, y) = \sqrt{3}x + y$ の最大値を求めよ．また，$f(x, y)$が最大となるときの x，y の値を求めよ.

（計算用紙）

（計算用紙）