

口述試験(基礎学力)例題集

次の微分方程式について、以下の設問に答えよ。

$$\frac{dy}{dt} + f(t)y = g(t)y^2$$

(小問1) $w(t) = \frac{1}{y(t)}$ を用いて、上式を線形微分方程式に変形せよ。さらに $f(t) = 0$,

$g(t) = \sin t$ であるとき、一般解を求めよ。

(小問2) $f(t) = t$, $g(t) = e^{\frac{1}{2}t^2} \sin t$ であるとき、一般解 $y(t)$ を求めよ。

(小問3) (小問1)において $y(0) = \frac{1}{\alpha}$ (ここで α は実数の定数, $\alpha \neq 0$), $z = e^{it}$ と置いて,
 $\int_0^{2\pi} y(t) dt$ を求めよ。ただし $i = \sqrt{-1}$ とする。

ある大学の専攻に属する学生の携帯電話を調べたところ、全員が携帯電話を所有し、イツデモ(Itsudemo)とオーユー(OhYou!)の二つのキャリア会社のどちらか一つを使っていることがわかった。また毎月、イツデモ使用者の $100\alpha\%$ がオーユーに変更し、オーユーの使用者の $100\beta\%$ がいつでもに変更していることがわかった。

学生の総数は変化しないものとして以下の問いに答えよ。また、 $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$ であり、今月のイツデモ及びオーユー使用者の割合を $x_1(0)$, $x_2(0)$ とする。

(小問1) 翌月のイツデモおよびオーユー使用者の割合を $x_1(1)$, $x_2(1)$ として、
下式の行列 A を求めよ。

$$\begin{bmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

(小問2) 行列 A の固有値を求めよ。

(小問3) (小問2) で求めたそれぞれの固有値に対する固有ベクトルを求めよ。

(小問4) (小問3) の結果を用いて、行列 A を対角化せよ。

(小問5) (小問4) の結果を用いて、 n か月後のそれぞれの使用者の割合 $x_1(n)$, $x_2(n)$ を求めよ。

次の t の関数について、以下の設問に答えよ。

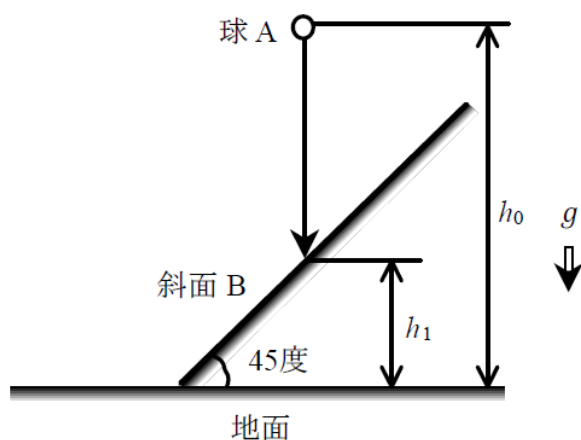
$$I(t) = \int_0^1 \frac{x^t - 1}{\log x} dx$$

ただし $t \geq 0$ とする。また、 $\log$ は自然対数を表す。

(小問1) $\frac{dI(t)}{dt}$ を求めよ。

(小問2) $I(t)$ を求めよ。 ヒント：積分定数は $I(0)$ を計算して求めることができる。

質点とみなすことのできる質量 m の球 A の運動について考える．重力加速度は g とする．

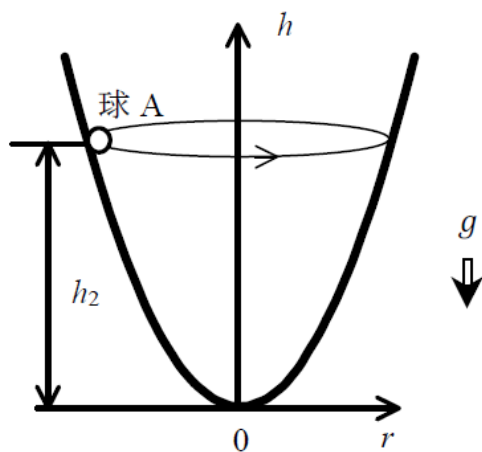


上図のように 45 度に傾斜した斜面 B が水平な地面に接している．地面から高さ h_0 の位置から球 A を初速 0 で落下させたところ，高さ h_1 の位置で斜面 B に衝突した．以下の問いに答えよ．衝突は鏡面反射で，その際の反発係数は 1 とする．

(小問 1) 斜面 B に衝突した直後の球 A の速さを求めよ．

(小問 2) 斜面 B に一度衝突した後，球 A が再び斜面 B に衝突しない条件を求めよ．

(小問 3) 球 A が斜面 B に一度衝突した後に地面に着地した．ある h_0 に対して，着地点が初期位置から水平方向に最も離れる h_1 の条件と，この条件で着地した時の球 A の速度が地面となす角を求めよ．



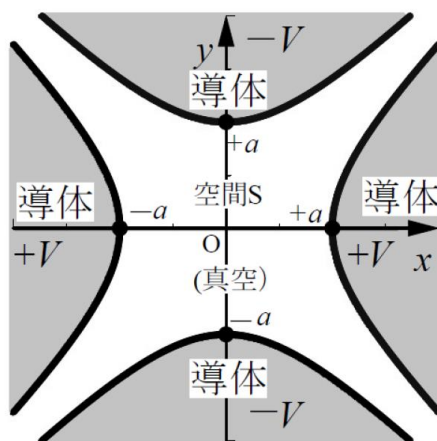
上図に示すような $h_0 = \frac{1}{a}r^2$ (a は正の定数) という回転放物線で表される壁面の内面に沿って球 A が運動している．以下の問いに答えよ．摩擦は無視する．

(小問 1) 球 A が高さ h_2 を保って周回しているとき，球 A の速さを求めよ．

下図に示すように、領域が以下の2式で表される4つの導体がある。

$$x^2 - y^2 \geq a^2 \quad (-\infty < z < +\infty),$$

$$x^2 - y^2 \leq -a^2 \quad (-\infty < z < +\infty).$$



ここで x, y, z は三次元直交座標系を表す。導体以外の領域は真空であり、この領域を空間 S と記す。下図に示すように、一定の電位 $+V(>0)$ と $-V$ を導体に印加する。空間 S 内に時刻 $t=0$ に静かに置いた荷電粒子(電化 $q>0$, 質量 m)の運動について以下の問いに答えよ。

(小問1) 空間 S 内の点 (x, y, z) における電位 $\phi(x, y, z)$ は以下の式で表せることを示せ。

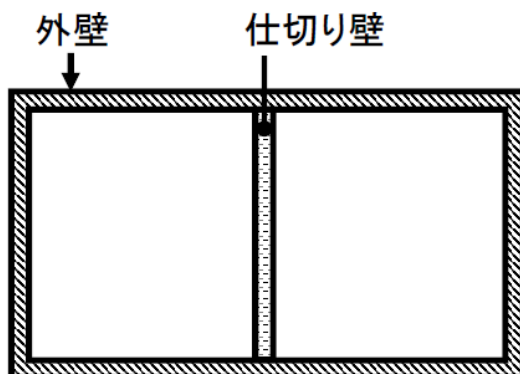
$$\phi(x, y, z) = \frac{V}{a^2} (x^2 - y^2)$$

さらに、空間 S の点 (x, y, z) における電場 (E_x, E_y, E_z) を求めよ。

(小問2) 空間 S 内での荷電粒子の運動方程式を x, y, z 成分に分けて記せ。

(小問3) (小問2) の運動方程式において、空間 S 内に留まる周期運動を示す解が得られる荷電粒子の初期位置の範囲を答えよ。また、その周期を答えよ。

下図に示すような断熱の外壁で囲まれた容器を考える.内部は仕切り壁によって二つに分けられており, その中に理想気体を封入する. この系について以下の問いに答えよ.



(小問1)仕切り壁を断熱とし, 容器の中央で固定する. 仕切り壁の左側には気体 A(圧力 P_{A0} , 温度 T_{A0} , 質量 m , 単位質量当たりの定容比熱 C_{VA} , 比熱比 γ)を封入し, 右側は真空とした. ある時刻に仕切り壁を瞬間的に取り去り, 気体 A が断熱自由膨張した. 平衡に達したときの気体の温度, およびこの過程におけるエントロピー変化量を求めよ.

次に, 仕切り壁をある位置に固定し, その左に気体 A, 右に気体 B を質量 m ずつ封入した. 各気体の初期状態の初期状態の温度を T_{A0} , T_{B0} , 圧力を P_{A0} , P_{B0} , 単位質量当たりの定容比熱を C_{VA} , C_{VB} とし, 比熱比はいずれも γ とする. 以下の問いに答えよ.

(小問2)初期状態における気体 A, B の体積比を(V_{A0}/V_{B0})求めよ.