東京大学大学院
新領域創成科学研究科
基盤科学研究系

受　験　番　号					

問題冊子にも受験番号を書きなさい。

先端エネルギー工学専攻

平成３０（２０１８）年度大学院入学試験問題

修士課程・博士後期課程共通

数　　　学

平成２９年８月２２日（火）

１３：３０～１６：３０（１８０分）

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，この冊子を開いてはいけません。
2. 本冊子の総ページ数は 6 ページです。落丁，乱丁，印刷不鮮明な箇所などがあった場合には申し出ること。
3. 解答には，必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
4. 問題は２題出題されます。２題とも解答しなさい。
5. 解答用紙は計２枚配られます。解答する問題ごとに必ず１枚の解答用紙を使用しなさい。解答用紙に書ききれないときは，裏面にわたってもよい。
6. 解答は日本語または英語で記入しなさい。
7. 解答用紙上方の指定された箇所に，受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入しなさい。問題冊子にも受験番号を記入しなさい。
8. 計算用紙は本冊子から切り離さないこと。
9. 解答に関係のない記号，符号などを記入した答案は無効とする。
10. 解答用紙および問題冊子は持ち帰ってはいけません。

（計算用紙）

第１問（数学）

ある生物の時刻 t における個体数を $N(t)$ とする．時刻 t_0 における個体数を $N_0\left(0 < N_0\right)$ とし，また，簡単のため $N(t)$ は正の実数値をとるものとして，以下の問に答えよ．

（問 1）単位時間当たりの $N(t)$ の時間変化率は $N(t)$ に比例すると仮定する．比例定数を $k_1\left(0 < k_1\right)$ として，時刻 $t\left(t_0 \le t\right)$ における $N(t)$ を求めよ．

（問 2） 次に単位時間当たりの $N(t)$ の時間変化率が $N(t)$ と $\left(N_\infty - N(t)\right)/N_\infty$ の積に比例すると仮定する．ただし $N_\infty\left(0 < N_\infty\right)$ は定数である．比例定数を $k_2\left(0 < k_2\right)$ として時刻 $t\left(t_0 \le t\right)$ における $N(t)$ を求めよ．

（問 3）（問 2）で求めた $N(t)$ について，区間 $t_0 \le t < \infty$ で変曲点が存在する条件を求めよ．

（問 4）（問 2）で求めた $N(t)$ のグラフの概形を，横軸を t，縦軸を $N(t)$ として描け．

第２問（数学）

次の行列 A の指数関数 $\exp A$ について以下の問に答えよ．

$$A=\begin{pmatrix}0 & -\alpha\\ \alpha & 0\end{pmatrix}.\qquad (\alpha \text{ は実数，} \alpha>0)$$

ただし，行列 X の指数関数 $\exp X$ は以下の式（指数級数）で定義される．

$$\exp X=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{X^k}{k!}=E+X+\frac{X^2}{2!}+\frac{X^3}{3!}+\cdots \qquad (E \text{ は単位行列})$$

（問１）行列 A の固有値 λ_k $(k=1,2)$ とそれぞれの固有値に対応する固有ベクトル $\vec{p}_k$ $(k=1,2)$ を求めよ．
ただし，固有ベクトルは第一番目の要素の値をそれぞれ１とせよ．

（問２）固有ベクトル $\vec{p}_1,\vec{p}_2$ を並べた行列 $P=(\vec{p}_1,\vec{p}_2)$ の逆行列 P^{-1} を求めよ．

（問３）行列 $\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$ を，A と P を用いて表せ.

（問４）$\exp A$ を，$\lambda_k\,(k=1,2)$ と P を用いて表せ．またその導出過程も示せ.

（問５）（問１），（問２）で求めた計算結果を用いて，$\exp A$ の各要素を求めよ．

（問６）ベクトル $\vec{x}$ に対して $(\exp A)\vec{x}$ は幾何学的に何を意味するか述べよ．

（問７）行列 X の固有値はすべて異なるものとしたとき，$\det(\exp X)=e^{Tr\,X}$ となることを，（問４）の結果を参考にして証明し，行列 A と（問５）の結果を用いて確認せよ．
ただし，$Tr\,X$ は行列 X のトレース（跡）で，対角要素の和である．

（計算用紙）

（計算用紙）