東京大学大学院
新領域創成科学研究科
基盤科学研究系

受　験　番　号					

問題冊子にも受験番号を書きなさい。

先端エネルギー工学専攻

平成２９（２０１７）年度大学院入学試験問題

修士課程・博士後期課程共通

数　　　学

平成２８年８月２３日（火）

１３：３０～１６：３０（１８０分）

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，この冊子を開いてはいけません。
2. 本冊子の総ページ数は 6 ページです。落丁，乱丁，印刷不鮮明な箇所などがあった場合には申し出ること。
3. 解答には，必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
4. 問題は２題出題されます。２題とも解答しなさい。
5. 解答用紙は計２枚配られます。解答する問題ごとに必ず１枚の解答用紙を使用しなさい。解答用紙に書ききれないときは，裏面にわたってもよい。
6. 解答は日本語または英語で記入しなさい。
7. 解答用紙上方の指定された箇所に，受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入しなさい。問題冊子にも受験番号を記入しなさい。
8. 計算用紙は本冊子から切り離さないこと。
9. 解答に関係のない記号，符号などを記入した答案は無効とする。
10. 解答用紙および問題冊子は持ち帰ってはいけません。

（計算用紙）

第 1 問（数学）

区間$\left[x_0 : x_1\right]$で定義され$g\left(x_0\right)=g\left(x_1\right)=0$である連続な関数$g(x)$がある．区間$\left[x_0 : x_1\right]$における曲線$y=g(x)$の長さを$L$， $S=\int_{x_0}^{x_1} g(x)\mathrm{d}x$とするとき，定数$\lambda$を用いて$I=S+\lambda L$と定義する．以下の問に答えよ．

（問 1） Lを定積分の形で表せ．

（問 2） $I=\int_{x_0}^{x_1} f\left(g(x), g'(x)\right)\mathrm{d}x$ と表した場合における関数$f\left(g(x), g'(x)\right)$を定義する．ただし$X'=\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}$とする．

(a) $g(x)$を微小変化させた関数$g(x)+\eta(x)$ $\left(\eta\left(x_0\right)=\eta\left(x_1\right)=0\right)$ を考える．
$f\left(g(x)+\eta(x), g'(x)+\eta'(x)\right)$が$f+\dfrac{\partial f}{\partial g}\eta(x)+\dfrac{\partial f}{\partial g'}\eta'(x)$で近似されると仮定し，
$\delta I=\int_{x_0}^{x_1} f\left(g(x)+\eta(x), g'(x)+\eta'(x)\right)\mathrm{d}x-\int_{x_0}^{x_1} f\left(g(x), g'(x)\right)\mathrm{d}x$を表す式を求めよ．

(b) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial g'}\eta(x)\right)$を計算し，任意の$\eta(x)$で$\delta I=0$となるための必要条件を求めよ．

(c) (問 2)−(b)で求めた条件における$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f-g'\dfrac{\partial f}{\partial g'}\right)$を表す式を求めよ．また，このとき任意の$x$に対して$f-g'\dfrac{\partial f}{\partial g'}$が満たすべき式を示せ．

（問 3） (問 2)−(c)で求めた式が満たされるとき， $g(x)$を求め，区間$\left[x_0 : x_1\right]$における曲線$y=g(x)$の概形を描け．

第２問（数学）

次の微分方程式 を考える。

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}$$

但し$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -3a-2 & -a-3 \end{pmatrix}$ であり，a は定数である。

（問１）$a = 3$のとき以下の問いに答えよ。

(a) 行列Aの固有値を全て求めよ。

(b) 行列Aを$T^{-1}AT$の変換により対角化する。この時の行列Tを求めよ。但し行列Tの第一行の要素は全て1であるものとする。

(c) $\boldsymbol{x}$の初期値を$\boldsymbol{x_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$とするとき，微分方程式の解を求めよ。

（問２）$a = 2$のとき微分方程式の解を求めよ。$\boldsymbol{x}$の初期値を$\boldsymbol{x_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$とする。

（問３）$a = -2$とする。ある初期値$\boldsymbol{x_0}$に対して， $t \to \infty$のときに微分方程式の解が$\boldsymbol{x} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$に収束した。この初期値$\boldsymbol{x_0}$を求めよ。但し，$\boldsymbol{x_0} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$とする。

（計算用紙）

（計算用紙）