第１問（物理学）

固定点 O から鉛直に吊るされた長さ h の支柱の下端 P に，長さ a の真っ直ぐで均一かつ剛体の橋 PQ が取り付けられており，橋のもう一方の端 Q は，固定点 O とばねで連結されている．なお支柱は立方体のブロックにより固定点 O で回転が出来ないよう固定されており，下端 P では，橋とは摩擦なしで自由に回転できるよう連結されている．橋に何も乗っていない時，図 1 (a)のように橋は斜めに傾いており，ばねの長さは支柱の長さと同じになった．次に，端 P から距離 s の位置に人が乗った時，図 1 (b)のように橋は水平になった．橋の質量を m，人の質量を M，重力加速度を g とし，以下の問に答えよ．ただし，支柱とばねの質量は無視できるとし，人は橋上の質点と考えよ．

（問１）図 1 (a)および図 1 (b)の場合について，ばねの張力を計算せよ．
（問２）ばね定数 k を計算せよ．

ここで，橋の中央 G に人が乗った時($s = a/2$)に，図 1 (b)のように橋が水平になったとする．この状態で，固定点 O のブロックおよびばねが同時に外れた．その後の橋の運動について以下の問に答えよ．なお人は橋の上で動かないとする．

（問３）図２に示したように，固定点 O を原点，水平を x 軸，垂直下方を y 軸とし，橋が傾き角 α，支柱が傾き角 β となった時，点 G の座標を (x, y)，支柱が橋を引く力を F_P として，点 G の x および y 方向の運動方程式，および点 G 周りの回転の方程式を立てよ．なお橋の重心周りの慣性モーメントは $I = \dfrac{m}{12}a^2$ である．

（問４）ブロックおよびばねが外れた直後の運動を考える．点 G の座標 (x, y) を，α および β を使って表し，以下の式が成り立つことを示せ．

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -h\frac{d^2\beta}{dt^2} \quad , \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{a}{2}\frac{d^2\alpha}{dt^2}$$

（問５）（問４）の条件下で，m，M，a，g を用いて $\dfrac{d^2\alpha}{dt^2}$ の値を求めよ．さらに橋の傾き角 α を時間の関数として求めよ．

（問６）図２で端 P を x および y 方向に動かない固定点と想定し，端 P を支点とする橋 PQ の回転運動のみを考え，回転の初期における橋の傾き角 α を時間の関数として求めよ．またその結果が，（問５）で求めた答えと一致することを確認し，その理由を述べよ．

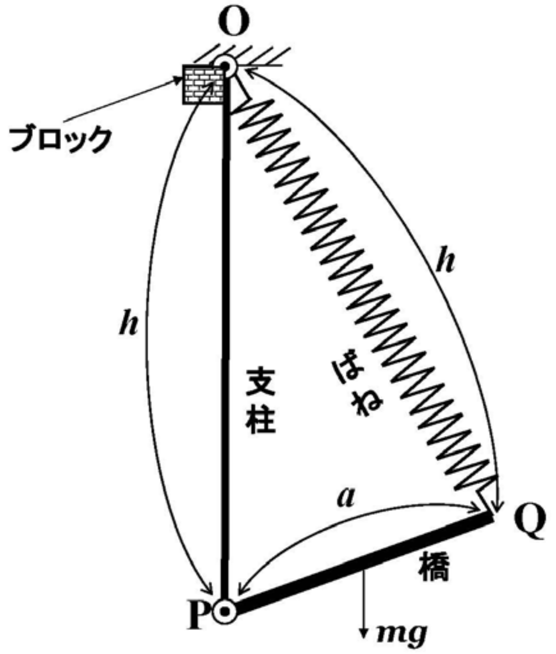

図１（a）

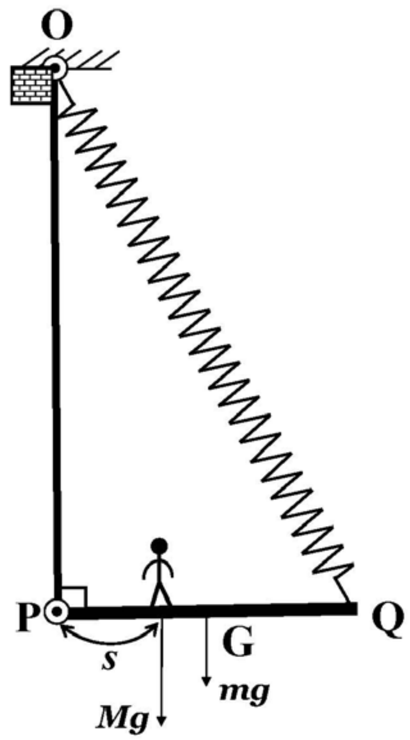

図１（b）

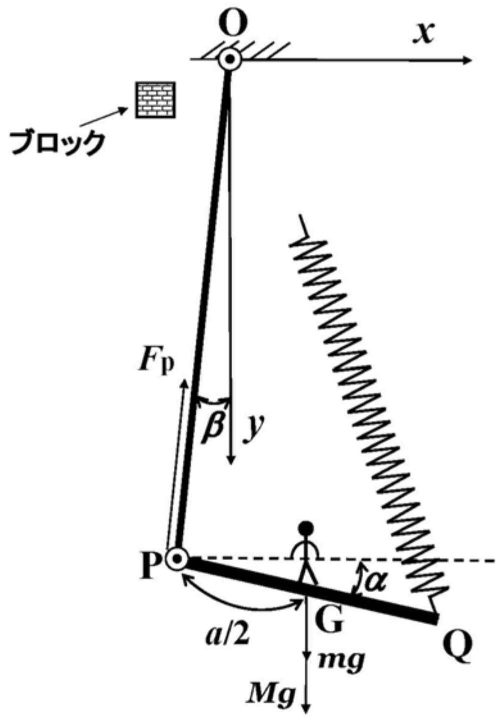

図２

第２問（物理学）

図１に示すように，領域が以下の２式で表される４つの導体がある．

$$x^2 - y^2 \geq a^2 \qquad (-\infty < z < +\infty)$$
$$x^2 - y^2 \leq -a^2 \qquad (-\infty < z < +\infty)$$

ここで $x,\ y,\ z$ は三次元直交座標系を表す．導体以外の領域は真空であり，この領域を空間 S と記す．図１に示すように，一定の電位 $+V\,(>0)$ と $-V$ を導体に印加する．空間 S 内に時刻 $t=0$ に静かに置いた荷電粒子（電荷 $q>0$，質量 m）の運動について以下の問に答えよ．

（問１）空間 S 内の点 (x, y, z) における電位 $\phi(x, y, z)$ は以下の式で表せることを示せ．

さらに，空間 S 内の点 (x, y, z) における電場 (E_x, E_y, E_z) を求めよ．

$$\phi(x,\ y,\ z) = \frac{V}{a^2}\ (x^2 - y^2)$$

（問２）空間 S 内での荷電粒子の運動方程式を x, y, z 成分に分けて記せ．

（問３）（問２）の運動方程式において，空間 S 内に留まる周期運動を示す解が得られる荷電粒子の初期位置の範囲を答えよ．また，その時の周期を答えよ．

以下では，空間 S に一様な静磁場 $(0, B, 0)$ をさらに加えた場合を考える．

（問４）空間 S 内での荷電粒子の運動方程式を x, y, z 成分に分けて記せ．

（問５）（問３）で答えた範囲を満たす初期位置に対して，（問４）の運動方程式の解が空間 S 内に留まる周期運動となることを示し，その時の周期を答えよ．

（問６）（問３）で答えた範囲を満たす初期位置 (x_0, y_0, z_0) に荷電粒子を置いた．初期位置からの荷電粒子の相対位置の軌跡 $(x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0)$ を xz 平面に投影し図示せよ．

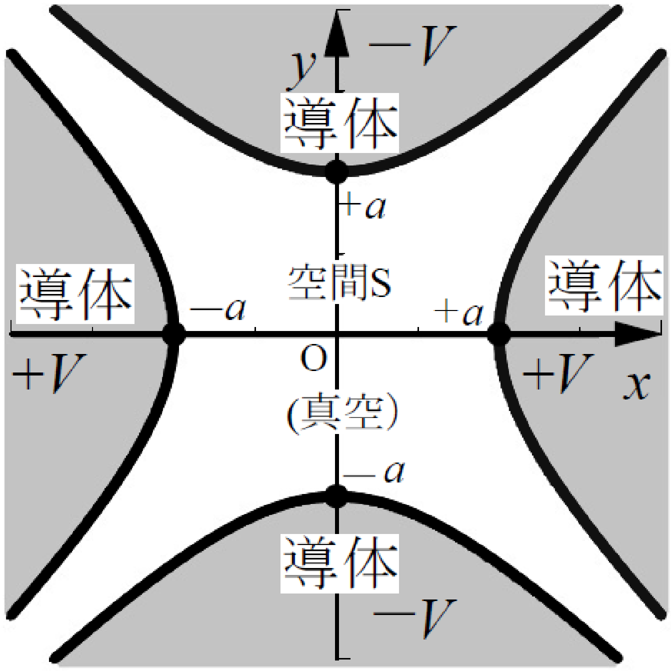

図 1

第３問（物理学）

直方体容器に質量mの分子N個が気体として封入されている．図１に示すように直交座標系xyzをとる．容器の一面である壁面 A はx軸方向に滑らかに動かすことができ，壁面 A と相対する面の間の距離をxとする．分子は容器の全壁面と弾性的に衝突している．すなわち，粒子は壁と衝突した際に分子と壁との相対速度は，接線成分は変わらず法線成分は大きさがそのままで向きだけが逆となる．また，各分子が有するエネルギーは運動エネルギーのみとする．分子同士間の衝突により十分な時間経過後には分子速度分布はある平衡状態に至る．その平衡状態における分子の速度分布関数を$f(\mathbf{v})$とし，$f(\mathbf{v})$を次式に記す．

$$f(\mathbf{v}) = \frac{n}{\sqrt{\pi}^3}\frac{1}{v_{\mathrm{th}}^3}\exp\left(-\frac{\mathbf{v}^2}{v_{\mathrm{th}}^2}\right),\quad \text{ただし}\quad \mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$$

ここで，nは容器内の分子数密度，v_{th}はその時の分子速度分布関数を特徴づける特性速度である．壁面 A を動かす際に生じる分子の運動エネルギー変化を考える．次の問に答えよ．なお，$\delta/v_{th} \ll 1$において，以下の関係式を用いてもよい．

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{v}^2 f(\mathbf{v})dv_x dv_y dv_z = \frac{3}{2}nv_{\mathrm{th}}^2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\delta}^{\infty} f(\mathbf{v})dv_x dv_y dv_z \cong \frac{n}{2}\left(1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\delta}{v_{\mathrm{th}}}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\delta}^{\infty} v_x f(\mathbf{v})dv_x dv_y dv_z \cong \frac{1}{2\sqrt{\pi}}nv_{\mathrm{th}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\delta}^{\infty} v_x^2 f(\mathbf{v})dv_x dv_y dv_z \cong \frac{1}{4}nv_{\mathrm{th}}^2$$

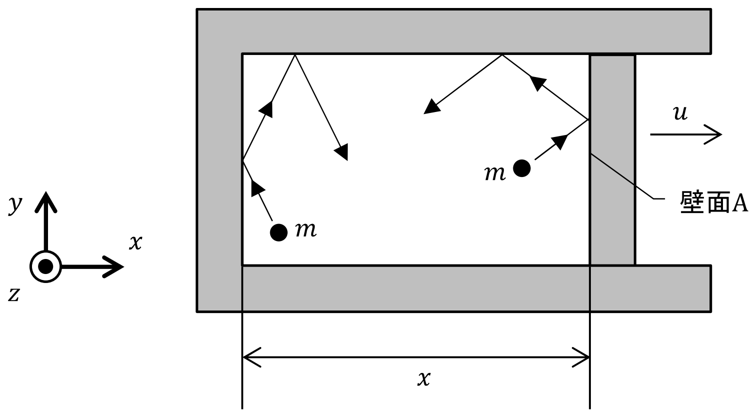

図１

（問１）系の総運動エネルギー，すなわち全分子の運動エネルギーの合計値Eを求めよ．

（問２）速度(v_x, v_y, v_z)を有する１つの分子が，x軸方向に速度uで動いている壁面 A に衝突した．この分子の衝突前後における運動エネルギー変化量$\Delta\epsilon$を求めよ．

（問３）壁面 A がx軸方向に速度uで動いている．微小時間Δtの間に壁面 A にぶつかる全分子に対して衝突前後の運動エネルギー変化量の合計値ΔEを求めよ．なお，Δtは十分に小さく，この間に分子の速度分布関数は変化しないとする．ただし，u/v_{th}を一次の微小量とし，二次以上の微小量を無視せよ．

（問４）問３の条件において，微小時間Δtにおける壁面 A の移動量をΔxとする．ΔEとΔxの関係式から，総運動エネルギー$E(x)$に関してxの関数としての微分方程式を導出せよ．

（問５）問４の条件において，壁面 A を速度uで距離Δx動かした後，十分に時間を経過させ分子が新しい平衡状態に至るのを待つ．その後，再び壁面 A をΔx動かすという工程を繰り返し，壁面位置をx_1からx_2まで移動させる．このとき，系の総運動エネルギーが$E(x_1) = E_1$から$E(x_2) = E_2$まで変化する．$u \to 0$の極限において，全分子の運動エネルギー合計値の変化率E_2/E_1を求めよ．