第 1 問（物理学）

質点とみなすことのできる質量 m の球 A の運動について考える. 重力加速度は g とする.

（問１）図 1 のように 45 度に傾斜した斜面 B が水平な地面に接している．地面から高さ h_0 の位置から球 A を初速 0 で落下させたところ，高さ h_1 の位置で斜面 B に衝突した．以下の問に答えよ．衝突は鏡面反射で，その際の反発係数は 1 とする.

(1) 斜面 B に衝突した直後の球 A の速さを求めよ.

(2) 斜面 B に一度衝突した後，球 A が再び斜面 B に衝突しない条件を求めよ.

(3) 球 A が斜面 B に一度衝突した後に地面に着地した．ある h_0 に対して，着地点が初期位置から水平方向に最も離れる h_1 の条件と, この条件で着地した時の球 A の速度が地面となす角を求めよ.

（問２）図 2 に示すような $h=\dfrac{1}{a}r^2$（a は正の定数）という回転放物面で表される壁面の内面に沿って球 A が運動している．以下の問に答えよ．摩擦は無視する.

(1) 球 A が高さ h_2 を保って周回しているとき，球 A の速さを求めよ.

(2) (1)の運動をしている球 A を, その速度方向に背後から叩いて瞬間的に 2 倍の速さまで加速したところ，球 A は壁面の内面を周回しながら上下に振動を始めた. 球 A の最高到達点の高さを求めよ.

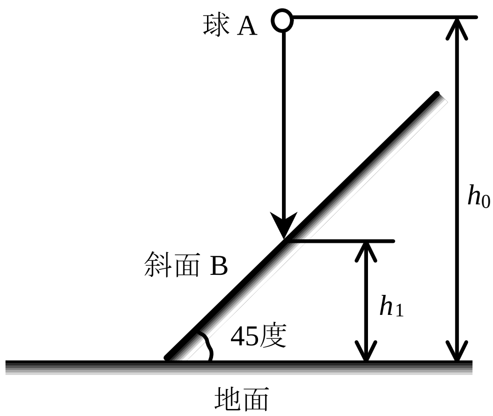


図 1

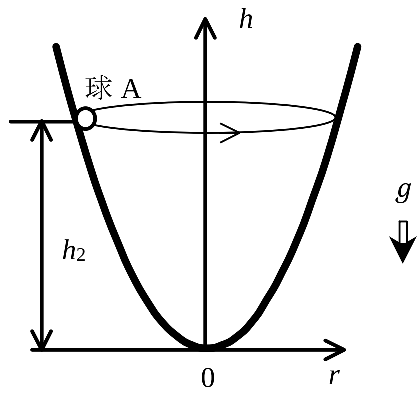


図 2

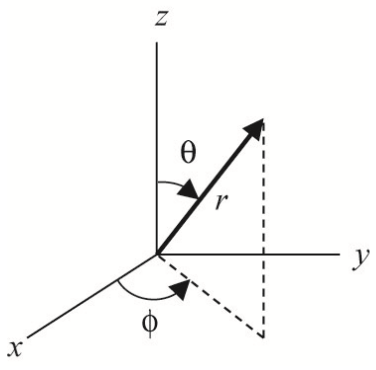
第２問（物理学）

ガウスの法則は，電気変位（電束密度とも呼ばれる）を $\boldsymbol{D}$，真電荷（自由電荷とも呼ばれる）による体積電荷密度を ρ_{f} として，$\nabla\cdot\boldsymbol{D} = \rho_{\mathrm{f}}$ と表される．電気変位は電場（電界とも呼ばれる）$\boldsymbol{E}$ を用いて $\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E} = \varepsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$ と書ける．ただし ε は物質の誘電率であり，ここでは物質中で定数としてよい．ε_0 は真空の誘電率である．$\boldsymbol{P}$ は分極と呼ばれ，物質中で分子に束縛されている電荷（束縛電荷と呼ばれる）が正負に分極する効果を表す．真空中では分子が存在しないので，$\boldsymbol{P} = 0$ である．以下の導体球または誘電体球に関する問に答えよ．座標系は図の球座標系を用いること．ただし原点は導体球または誘電体球の中心とする．

（問１）　真電荷 q をもつ半径 R の導体球が無限に広い真空中にある系を考える．このとき導体球内外の静電ポテンシャル Φ および電場 $\boldsymbol{E}$ の空間分布を求めよ．ただし静電ポテンシャルは無限遠でゼロとする．またこの系のもつ静電エネルギー $W_{\mathrm{e}} = \int (\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D} / 2)\, \mathrm{d}V$ を求めよ．ただし $\mathrm{d}V$ は微分体積要素であり，積分は系の全領域にわたるものである．

（問２）　半径 R で誘電率 ε（$> \varepsilon_0$）の誘電体球内に，真電荷 q を一様な密度で分布させたとき，誘電体球内（$r < R$）の電場 $\boldsymbol{E}$ および分極 $\boldsymbol{P}$ の空間分布を求めよ．

（問３）　（問２）の誘電体球（ただし真電荷はもたないとする）を，＋z 方向（球座標系では $\theta = 0$ の方向）の一様電場 $\boldsymbol{E}_0$ がある，無限に広い真空中に置いたとき，誘電体球内の電場は分子の分極により弱まり，$\boldsymbol{E}_{\mathrm{in}} = [3\varepsilon_0 / (\varepsilon + 2\varepsilon_0)]\,\boldsymbol{E}_0$ の一様電場となる．この事実を用いて誘電体内の分極 $\boldsymbol{P}$ を $\boldsymbol{E}_0$，ε，ε_0 を使って表せ．さらに，求めた分極 $\boldsymbol{P}$ から，束縛電荷の分極により誘電体内部（$r < R$）に誘起される体積電荷密度 ρ_{b} および誘電体表面（$r = R$）に誘起される表面電荷密度 σ_{b} の空間分布を求めよ．



図：　球座標系（r, θ, ϕ）と直交座標系（x, y, z）

第３問（物理学）

図１のように断熱されたシリンダーとピストンに囲まれた n モルの気体について考える．シリンダー内には気体を加熱または冷却することができる熱交換器が装着されている．気体は１モルあたりの気体定数が R，比熱比が γ(ただし，$\gamma>1$)で一定の理想気体とする．ピストンの断面積は A で，シリンダーとの間の摩擦はないものとする．はじめにピストンは静止しており，シリンダー内の気体は，圧力 p_0，体積 V_0，エントロピー S_0 であった．ここで，外部の圧力は p_0 で一定である．以下の設問に答えよ．

（問１）シリンダー内の気体の圧力が p，体積が V であるとき，気体のエントロピーは，

$$S=\frac{nR}{\gamma-1}ln\frac{pV}{p_0V_0}+nR\,ln\frac{V}{V_0}+S_0$$

で与えられる．このことをエントロピーの定義と熱力学の第１法則から導け．

（問２）熱交換器のスイッチを入れると気体が加熱されて準静的に膨張した．体積が V_1 となったときにスイッチを切ってピストンを静止させた．この間に気体に加えられた熱量 Q_1 および気体のエントロピー変化 ΔS_1 を $\gamma, R, n, p_0, V_0, V_1$ で表せ．

（問３）シリンダー内の気体を，圧力 p_0，体積 V_0 の状態に戻した後，図２のようにばね定数 k が一定で質量が無視できるばねをピストンに取り付けた．気体の体積が V_0 のとき，ばねは自然長になっている．この位置からピストンをわずかにずらして手を離すと，ピストンは単振動をした．この周期 τ を $\gamma, A, k, m, p_0, V_0$ で表せ．ただし，ピストンの質量を m とし，ピストンの運動に伴う気体のエントロピー変化はないものとする．

（問４）ピストンの振動運動を静止させ，シリンダー内の気体を，圧力 p_0，体積 V_0 の状態に戻した．つぎに，熱交換器のスイッチを入れると気体は準静的に膨張し，体積が V_2 となったときにスイッチを切ってピストンを静止させた．体積が V_2 のときの気体の圧力 p_2，気体が膨張する過程で外部にした仕事 W_2，および熱交換器から気体に加えられた熱量 Q_2 を $\gamma, A, k, p_0, V_0, V_2$ で表せ．

（問５）（問４）で考えた気体の体積が V_2 である状態において，瞬間的にばねを外したところ，ピストンは外部圧力 p_0 を受けながら動き出した．いま，気体の圧力が p_0 となった時にピストンを静止させることができたとする．この時の気体の体積 V_3 と気体が外部にした仕事 W_3 を γ, p_0, p_2, V_2 で表せ．

（問６）（問５）の体積 V_3 は，気体の圧力を p_2 から p_0 まで等エントロピー的に膨張させたときの体積 V_4 と比べて大きいか小さいか．また，（問５）で考えた過程において系のエネルギーはどのように保存されているか，定性的に説明せよ．

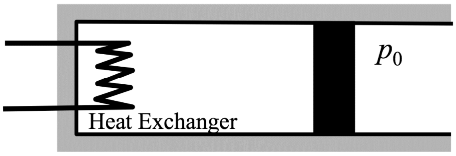


図 1

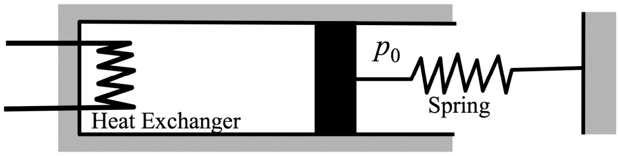


図 2