第１問（数学）

次の連立常微分方程式について以下の設問に答えよ．

$$\frac{dx_1}{dt} = 4x_1 - \alpha x_2 - 6x_3$$

$$2\frac{dx_2}{dt} = 3x_1 - 2\alpha x_2 - 3x_3$$

$$2\frac{dx_3}{dt} = 7x_1 - 2x_2 - 11x_3$$

ただし，α は実数の変数とする．

（問１）この連立常微分方程式を

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = A(\alpha)\vec{X}$$

と表わす．ただし，$\vec{X}^T = (x_1, x_2, x_3)$，$A(\alpha)$ は(3×3)行列，上付き添え字T は転置を示す．

$\alpha = 1$とするとき, 行列 $A(1)$ の固有値 λ_i , それに対応する固有ベクトル $\vec{u}_i$ $(i = 1,2,3)$, 行列 $A(1)^T$ の固有値 λ_i，それに対応する固有ベクトル $\vec{v}_i$ $(i = 1,2,3)$ をそれぞれ求めよ．ただし，固有ベクトルは，３番目の要素の値をそれぞれ１とせよ．

（問２）$\alpha = 1$，$\vec{X}$ の初期値を $\vec{X}_0{}^T = \left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$ としたとき，この連立常微分方程式の解を求めよ．$t \to \infty$ のとき，$\vec{X}$ はどのような振る舞いをするか述べよ．

（問３）α を $\alpha = 1$から微小変化させたとき，行列 $A(1)$ の固有値 λ_i の変化を示す $\dfrac{d\lambda_i}{d\alpha}$ を α に対する固有値感度と言い，

$$\frac{d\lambda_i}{d\alpha} = \frac{\vec{v}_i{}^T \dfrac{dA(\alpha)}{d\alpha} \vec{u}_i}{\vec{v}_i{}^T \vec{u}_i}$$

と表わされる．この式を固有値と固有ベクトルの関係式から導け．

（問４）α を $\alpha = 1$から微小増加させると，行列 $A(1)$ の固有値 λ_i $(i = 1,2,3)$ がそれぞれどのように変化するか，固有値感度 $\dfrac{d\lambda_i}{d\alpha}$ を計算して述べよ．またこのとき，（問２）で求めた連立常微分方程式の解 $\vec{X}$ の振る舞いがどのように変化するか述べよ．

第２問（数学）

（問１）次の t の関数について，以下の設問に答えよ．

$$I(t)=\int_0^1 \frac{x^t-1}{\log x}dx$$

ただし $t\geq 0$ とする．また，log は自然対数を表す．

(a) $\dfrac{dI(t)}{dt}$ を求めよ．

(b) $I(t)$ を求めよ．

ヒント：積分定数は $I(0)$ を計算して求めることができる．

（問２）次の t の関数について，以下の設問に答えよ．

$$I(t)=\int_0^{\pi/2}\log(t^2\cos^2 x+a^2\sin^2 x)dx$$

ただし $t>0$，$a>0$ とし，a は定数である．また，log は自然対数を表す．

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^2+b^2}dx$ を求めよ．ただし b は定数で $b>0$ とする．

(b) $\dfrac{dI(t)}{dt}$ を求めよ．

(c) $I(t)$ を求めよ．