

第1問 (数学)

次の微分方程式について、以下の設問に答えよ.

$$\frac{dy}{dt} + f(t)y = g(t)y^2 \quad (1)$$

(問1) $w(t) = 1/y(t)$ を用いて、式(1)を線形微分方程式に変形せよ. 更に $f(t) = 0$, $g(t) = \sin t$ であるとき、一般解 $y(t)$ を求めよ.

(問2) $f(t) = t$, $g(t) = e^{\frac{1}{2}t^2} \sin t$ であるとき、一般解 $y(t)$ を求めよ.

(問3) (問1)において $y(0) = 1/\alpha$ (ここで α は実数の定数, $\alpha \neq 0$) であるとき, $z = e^{it}$ と置いて $\int_0^{2\pi} y(t) dt$ を求めよ. ただし $i = \sqrt{-1}$ とする.

第2問 (数学)

ある大学の専攻に属する学生の携帯電話を調べたところ、全員が携帯を所有し、イツデモ (Itsudemo) とオーユー (OhYou!) の二つのキャリア会社のどちらか一つを使っていることがわかった。また毎月、イツデモ使用者の $100\alpha\%$ がオーユーに変更し、オーユー使用者の $100\beta\%$ がイツデモに変更していることもわかった。

学生の総数は変化しないものとして以下の問に答えよ。また、 $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$ であり、今月のイツデモおよびオーユー使用者の割合を $x_1(0)$, $x_2(0)$ とする。

(問1) 翌月のイツデモおよびオーユー使用者の割合を $x_1(1)$, $x_2(1)$ として、下式の行列 A を求めよ。

$$\begin{bmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

(問2) 行列 A の固有値を求めよ。

(問3) (問2) で求めたそれぞれの固有値に対する固有ベクトルを求めよ。

(問4) (問3) の結果を用いて、行列 A を対角化せよ。

(問5) (問4) の結果を用いて、 n ヶ月後のそれぞれの使用者の割合 $x_1(n)$, $x_2(n)$ を求めよ。

(問6) 十分時間が経ったときの割合 $x_1(\infty)$, $x_2(\infty)$ を求めよ。

(問7) (問2) で求めた二つの固有値と、(問5) (問6) で得られた解の挙動との関係を説明せよ。