

第1問 (数学)

x - y 平面上で $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ とし, $r = a \cos n\theta$ (a は定数で $a > 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$, n は自然数) と表される曲線 C について考える. 以下の間に答えよ.

(問1) $n = 1$ の場合の曲線 C について考える.

- (a) 曲線 C 上で $\theta = \pi/6$, $\pi/3$, $2\pi/3$ となる点の座標 (x, y) をそれぞれ求めよ.
- (b) 曲線 C 上で $\theta = \theta_1$ となる点における単位接線ベクトルを求めよ.

(問2) 曲線 C 上で $r = 0$ となる点における曲線 C の接線を考える.

- (a) $r = 0$ となる θ を n を用いて表せ.
- (b) 接線の本数を求めよ.
- (c) それぞれの接線が x 軸となす角を求めよ.

(問3) $n = 3$ の場合の曲線 C について考える.

- (a) 曲線 C の概形を描け.
- (b) 曲線 C に囲まれた領域と, $x^2 + y^2 \leq \left(\frac{a}{2}\right)^2$ とが重なる部分の面積を求めよ.

第2問 (数学)

(問1) 次の n 次正方行列 A について以下の問に答えよ. ただし $n \geq 4$ とする.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- (a) A^2, A^3 を求めよ.
 (b) A^m を求めよ. ただし m は自然数とする.
 (c) $n = 4$ のとき, 次の行列 B について, $B = E + A$ と変形して B^{100} を求めよ. ただし E は 4 次単位行列とする.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(問2) P を n 次正方行列, E を n 次単位行列とする. 以下の問に答えよ. ただし $n \geq 2$ とする.

- (a) 任意の n 次正方行列 P について次式が成立するとき, 係数 a_0, a_1, \dots, a_{m-1} を求めよ. ただし m は自然数とする.

$$P^m - E = (P - E)(a_{m-1}P^{m-1} + a_{m-2}P^{m-2} + \cdots + a_1P + a_0E)$$

- (b) $P^k = O$ が成立するような自然数 k が存在するとき, $P - E$ の逆行列を P, E, k を用いて表せ.
 (c) 次の n 次正方行列 Q の逆行列を求めよ. ただし $b \neq 0$ とする.

$$Q = \begin{bmatrix} b & a & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & b & a & 0 & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & b \end{bmatrix}$$